PRACE TOWARZYSTWA PRZYJACIÓŁ NAUK W WILNIE
WYDZIAŁ NAUK MATEMATYCZNYCH I PRZYRODNICZYCH

TRAVAUX DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES
DE WILNO
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES T. XII

BULLETIN
DU SÉMINAIRE MATHÉMATIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE WILNO

1

POUR LES ÉCHANGES S'ADRESSER AU SÉMINAIRE MATHÉMATIQUE,
UNIVERSITÉ STEFAN BATORY, ZAMKOWA 11, WILNO, POLOGNE.

WILNO 1938

Z ZASIŁKU FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ JÓZEFA PIŁSUDSKIEGO.

PRACE TOWARZYSTWA PRZYJACIÓŁ NAUK W WILNIE
WYDZIAŁ NAUK MATEMATYCZNYCH I PRZYRODNICZYCH

TRAVAUX DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE WILNO
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES T. XII

BULLETIN DU SÉMINAIRE MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WILNO

1

POUR LES ÉCHANGES S'ADRESSER AU SÉMINAIRE MATHÉMATIQUE, UNIVERSITÉ STEFAN BATORY, ZAMKOWA 11, WILNO, POLOGNE.



WILNO 1938

Z ZASIŁKU FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ JÓZEFA PIŁSUDSKIEGO.

ZAKŁADY GRAFICZNE „ZNICZ", WILNO, UL. BISKUPA BANDURSKIEGO 4.

TABLE DES MATIÈRES

S. Kempisty. Application des fonctions de triangle à la théorie de l'aire d'une surface courbe . . . . 5—12

M. Krzyżański. Sur les fonctions à variation bornée au sens de Hardy 13—15

A. Zygmund. A remark on conjugate series . . . . 16—18

J. Marcinkiewicz. Quelques théorèmes sur les séries et les fonctions 19—24

D. Wajnsztejn. Eine Forme für die Biquaternionen . . . . 25—27

STEFAN KEMPISTY.

Zastosowanie funkcji trójkąta do teorji pola powierzchni krzywej.

Application des fonctions de triangle à la théorie de l'aire d'une surface courbe.

(Komunikat zgłoszony na posiedzeniu w dniu 5.IV.1937 r.)

1. Le plus grand coté du triangle est son *diamètre,* la plus petite hauteur est la *largeur* de ce triangle. Nous dirons qu'un triangle T est *λ-régulier* lorsque le rapport de sa largeur au diamètre est au moins égale a un nombre posititif $\lambda < \frac{1}{2}$.

Fixons la valeur de λ et considérons un nombre fini de triangles λ-réguliers

$$T_1, T_2, \ldots, T_n,$$

situés sur un plan et non empiétants. Leur ensemble est un *système élémentaire S.*

Désignons par $|T|$ l'aire du triangle T et posons

$$|S| = |T_1| + |T_2| + \ldots + |T_n|.$$

Quand les triangles de S sont contenus dans un triangle T et $|S| = |T|$, nous dirons que S est une *division triangulaire* de T. On définit de la même manière une division triangulaire d'un rectangle.

Soit $F(T)$ une fonction uniforme de triangle définie pour tous les triangles T contenus dans un rectangle fondamental R. Nous dirons que $F(T)$ est *continue* quand F tend vers zéro avec $|T|$. Soit S un système élémentaire. Nous dirons que $F(T)$ est absolument continue, si F(S) tend vers zéro avec $|S|$.

2. Désignons par D une division triangulaire de R. La limite inférièure (supérieure) de $F(D)$, le diamètre des triangles tendant vers zero, est *l'intégrale inférieure (supérieure)* de $F(T)$ dans R. La fon-

ction $F(T)$ est *intégrable* quand ces intégrales extrêmes sont égales, leur valeur commune est l'intégrale

$$\int_R F(T).$$

On définit de la même manière l'intégrale de F dans un triangle T.

La limite inférieure (supérieure) du rapport $F(T)/T$ pour T λ-régulier tendant vers un point (x, y) contenu dans T sera appelée *dérivée inférieure (supérieure)* de $F(T)$ au point (x, y) et sera désigné par $\underline{D}_x F$ (respectivement par $\overline{D}_x F$). Lorsque ces deux nombres sont égaux leur valeur commune est la *dérivée* $D_x F$.

Si la fonction $F(T)$ est intégrable et dérivable en même temps dans R, nous avons presque partout

$$(1) \qquad D_x F = D_x \int_T F.$$

On le voit en appliquant à $F(T)$ un raisonnement dont se sert M. S. Saks pour établir un théorème analogue sur les fonctions de rectangle [1]).

Si F est absolument continue et dérivable dans R, elle y est presque partout intégrable et on a

$$(2) \qquad \int_R F = \iint_R D_x F dxdy.$$

Pour le prouver il suffit de réproduire la démonstration d'un théorème de M. J. C. Burkill sur les fonctions absolument continues d'intervalle linéaire [2]).

Nous dirons que $F(T)$ est à variation finie dans R lorsque

$$\overline{\int_R} |F| < +\infty$$

Dans ce cas les dérivées extrêmes sont presque partout sommables et on a

$$(3) \qquad \iint_R |\overline{D}_x F|\, dxdy \leq \overline{\int_R} |F|.$$

Cela résulte d'un théorème de M-lle R. C. Young [3]).

---

[1]) Théorie de l'intégrale, Varsovie 1933, p. 106, th. VI.

[2]) Functions of Intervals, Proc. Lond. Math. Soc. 22 (2), 1924, p. 309, th. VII

[3]) Functions of Σ..., Math. Ann. 29, 1926, p. 187, th. I.

3. Considérons une surface continue

$$z = f(x, y)$$

définie pour tous les points (x, y) d'un rectangle R.

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les sommets d'un triangle T contenu dans R. Posons

$$z_i = f(x_i, y_i), \quad P_i = (x_i, y_i, z_i), \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$F_1(T) = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad F_2(T) = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Les valeurs de F_1 et F_2 sont égales aux aires des projections du triangle $P_1 P_2 P_3$ sur les plans yz et zx. La valeur de la fonction

$$F(T) = \sqrt{|T|^2 + F_1^2 + F_2^2}$$

est l'aire du triangle $P_1 P_2 P_3$. Il est évident que cette fonction est continue dans R. Le nombre $F(S)$ est l'aire du polyèdre inscrit dans la surface, si S est une division triangulaire de R. L'intégrale de F dans R est la limite de l'aire de ce polyèdre inscrit.

Nous dirons que la surface considérée est *triangulable* lorsque

$$\int_R F < +\infty$$

c'est à dire lorsque $F(T)$ est à variation finie, puisque $|F| = F$. Comme

$$|T|, F_1, F_2 \leqq \sqrt{|T|^2 + F_1^2 + F_2^2} \leqq |T| + F_1 + F_2,$$

on voit qu'il faut pour cela et qu'il suffit que les fonctions F_1 et F_2 soient à variation finie.

Donc si la surface est triangulable, les devirées extrêmes de F_1 et de F_2 sont presque partout finies dans R.

4. Nous allons montrer que les fonctions F_1, F_2 et par suite F sont presque partout dérivables.

Considérons deux triangles:

$$(a, b), (a + h, b), (a + h, b + k),$$
$$(a + h, b), (a + h, b + k), (a, b + k).$$

On montre facilement qu'en tout point (a, b) où les dérivées extrêmes de F_1 et F_2 sont finies, on a

$$\limsup \frac{|f(a+h, b+k)-f(a, b)|}{\sqrt{h^2+k^2}} < +\infty.$$

h et k étant les nombres positifs satisfaisant à la condition

$$\frac{1-\sqrt{1-4\lambda^2}}{2\lambda} < \frac{k}{h} < \frac{1+\sqrt{1-4\lambda^2}}{2\lambda}.$$

Donc, en vertu d'un théorème de M. U. S. Haslam-Jones, la fonction f est presque partout totalement différentiable au sens de Stolz[1]).

Soit d'autre part (x, y) un point où $f(x, y)$ est totalement différentiable et T un triangle λ-régulier contenant le point (x, y).

$$F_1(T) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} y_1-y & z_1-z & 1 \\ y_2-y & z_2-z & 1 \\ y_3-y & z_3-z & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

Mais, f étant totalement différentiable au point (x, y), on a

$$z_i-z=(x_i-x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\alpha_i\right)+(y_i-y)\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\beta_i\right) \qquad (i=1,2,3)$$

où α_i et β_i sont les fonctions infiniment petites des accroissements x_i-x et y_i-y.

Par suite on a

$$\frac{F_1(T)}{|T|} = \left|\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\Delta}{2|T|}\right|$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1-y & (x_1-x)\alpha_1+(y_1-y)\beta_1 & 1 \\ y_2-y & (x_2-x)\alpha_2+(y_2-y)\beta_2 & 1 \\ y_3-y & (x_3-x)\alpha_3+(y_3-y)\beta_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Soit d le diamètre du triangle T et l la largeur de T. Comme

$$2|T| = ld \geqq \lambda d^2,$$

nous avons

$$\frac{|\Delta|}{2|T|} < \frac{1}{\lambda}\left\{\sum_{i=1}^{3}|\alpha_i| + \sum_{i=1}^{3}|\beta_i|\right\}.$$

[1]) Derivate planes and tangent planes of a measurable function, Quart. J. Math. Oxford Ser. 3, 1932, p. 120—132.

Quand d tend vers zéro, il en est de même des accroissements: $x_i - x$, $y_i - y$ et des infiniments petits: α_i et β_i. Par suite

$$(1) \qquad D_x F_1 = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|$$

On montre de la même manière que

$$(2) \qquad D_x F_2 = \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

et par suite

$$(3) \qquad D_x F = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}.$$

Si la surface est triangulable, les dérivées extrêmes de F_1 et F_2 sont presque partout finies, donc f est presque partout totalement différentiable et la surface a presque partout un plan tangent. De plus les égalités (1), (2) et (3) sont vraies presque partout dans R, donc les fonctions de triangle: F_1, F_2 et F sont presque partout dérivables.

5. L'égalité (1) du § 3 et l'égalité (3) du § 4 entrainent, en cas d'intégrabilite de F,

$$D_x \int_T F = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

presque partout dans R. Cela arrive, en particulier, quand F est absolument continue et dans ce cas nous avons en plus, d'après les égalités: (2) du § 2 et (3) du § 4, l'égalité

$$(1) \qquad \int_R F = \int\int_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

qui veut dire que la limite de l'aire du polyèdre inscrit dans la surface tend vers l'intégrale classique.

En général on n'a que la relation

$$\overline{\int_R} F \geqq \int\int_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

en vertu de (3) § 2.

Lorsque la surface est triangulable, son aire $A(R)$ au sens de Lebesgue est fini puisque le polyèdre inscrit dans la surface tend uniformement vers cette surface.

En s'appuyant sur le calcul de M. T. Rado, nous avons montrés, dans le travail cité, que l'aire $A(R)$ est une fonction absolument continue de rectangle R, si F_1 et F_2 sont des fonctions absolument continues de triangle rectangulaire T dont les cathètes sont parallèles aux axes x et y[1]).

D'après un théorème connu de M. L. Tonelli[2]) nous avons dans ce cas

$$(2) \qquad A(R) = \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

Par conséquent *quand F_1 et F_2 sont absolument continues* nous avons les égalités (1) et (2) qui entrainent

$$A(R) = \int_R F$$

et cela veut dire que *l'aire de la surface au sens de* Lebesgue *est limite de l'aire du polyèdre inscrit* les condition de régularité étant satisfaites.

6. En particulier quand la fonction $f(x, y)$ vérifie la condition de Lipschitz, nous avons

$$|z_i - z_j| < M\left\{|x_i - x_j| + |y_i - y_j|\right\} \quad (i, j = 1, 2, 3$$

et

$$F_1(T) = \frac{1}{2} \left|\, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 1 \end{vmatrix} \,\right| \leqq \frac{4\, M\, |T|}{\lambda}.$$

De même on a

$$F_2(T) \leqq \frac{4\, M\, |T|}{\lambda}.$$

Donc F_1 et F_2 sont absolument continues.

Or ces fonctions peuvent être absolument continues sans que $f(x, y)$ satisfasse à la condition de Lipschitz.

En effet soit

$$z = \sqrt{x}$$

dans le carré (0, 1; 0, 1) et numérotons les sommets du triangle T de manière qu'on ait $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$.

---

[1]) p. 130.

[2]) Sulla quadratura delle superficie, Atti. Accad. Linc. 6-e série 3, 1926.

Nous avons dans ce cas

$$F_1(T) \leqq \tfrac{1}{2}\, d\left[\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}+\sqrt{x_3}-\sqrt{x_1}\right] = \tfrac{1}{4}\iint\limits_R \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{\xi}} + \tfrac{1}{4}\int\limits_Q \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{\xi}}$$

R et Q étant respectivement les rectangles: $(x_1, x_2; 0, d)$, $(x_1, x_3; 0, d)$,

$$F_2(T) = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_3}-\sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_3}-\sqrt{x_2}\right) = \tfrac{1}{4}\iiint \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{\xi\eta\zeta}}$$

P désignant le parallélipidède rectangle $(x_1, x_2; x_1, x_3; x_2, x_3)$.

Comme ces intégrales sont des fonctions absolument continues par rapport à R, P et Q respectivement, les fonctions F_1 et F_2 sont absolument continues par rapport à T. En effet on a

$$\begin{aligned} & \lambda d(x_2 - x_1) \geqq \lambda\, |R| \\ 2\,|T| = ld \geqq\ & \lambda d(x_3 - x_1) \geqq \lambda\, |Q| \\ & \lambda\, (x_2 - x_1)\,(x_3 - x_2) \geqq \lambda\, |P|. \end{aligned}$$

7. M. H. Rademacher a montré dans son mémoire: *Ueber die partielle und totale Differenzierbarkeit* que pour $f(x, y)$ vérifiant la condition de Lipschitz l'aire du polyèdre inscrit dans la surface $z = f(x, y)$ tend vers l'intégrale

$$(1) \qquad \iint\limits_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy\,,$$

si les plans des faces du polyèdre inscrit tendent vers les plans tangents de la surface partout où ces plans existent[1]). Ensuite il a établi que cela arrive si les projections des faces du polyèdre sur le plan xy sont des triangles λ-réguliers suivant notre dénomination.

Il résulte de l'égalité (1) du § 5 que dans ces conditions l'aire du polyèdre inscrit tend vers l'intégrale (1) même si $f(x, y)$ ne satisfait pas à la condition de Lipschitz. Il suffit pour cela que les fonctions F_1 et F_2 soient des fonctions absolument continues de triangle T.

Inversement si l'aire du polyèdre en question tend vers l'intégrale (1), nous avons

$$\int\limits_T F = \iint\limits_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

[1]) Math. Annalen 81, 1920, p. 54—57.

quelque soit T dans R, par suite l'integrale de F sur T est une fonction absolument continue de triangle T el il en est de même de F, donc de F_1 et F_2.

Ainsi *la continuité absolue de* F_1 *et* F_2 *est une condition nécessaire et suffisante de la convergence de l'aire du polyèdre inscrit de la manière considérée vers l'intégrale* (1).

Streszczenie.

W pracy: *Sur la méthode triangulaire du calcul de l'aire d'une surface courbe*[1]) podałem zastosowanie teorji funkcji prostokąta do wyznaczania pola powierzchni krzywej

$$z = f(x, y)$$

przez wpisywanie wielościanów o ścianach trójkątnych. Rzuty ścian na płaszczyznę xy były trójkątami prostokątnemi otrzymanemi przez podział przekątnemi prostokątów siatki podziałowej na płaszczyźnie xy, przyczem stosunek długości boków tych prostokątów był jednostajnie ograniczony.

Jeżeli rzuty nie spełniają powyższych warunków a są dowolnemi trójkątami, w których stosunek najdłuższego boku do odpowiadającej mu najkrótszej wysokości jest jednostajnie ograniczony, pole powierzchni w znaczeniu Lebesgue'a jest również granicą pola wielościanu wpisanego, o ile funkcja spełnia warunek Lipschitza. Wynika to z badań H. Rademachera[2]) i L Tonelli'ego[3]).

Wprowadzając funkcje trójkąta możemy rozszerzyć klasę powierzchni, do których stosuje się powyższa metoda. Jest to zarazem, jak się przekonaliśmy, największe możliwe rozszerzenie klasy powierzchni, dla których pola powyżej określonych wielościanów, odpowiadających trójkątnej siatce podziałowej, zmierzają do całki Lebesgue'a.

$$\iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

---

[1]) Bulletin Soc. Math. de France 64, 1936, p. 119—132.

[2]) Ueber die partielle Differenzierbarkeit II, Math. Ann. 81, 1920, p. 54—57.

[3]) Sulla quadratura della superficie. Atti Accad. Linc. 6e serie, 3, 1926.

MIROSŁAW KRZYŻAŃSKI

O funkcjach o wahaniu skończonem w znaczeniu Hardy'ego.
Sur les fonctions à variation bornée au sens de Hardy.

(Komunikat zgłoszony przez czł. St. Kempistego na posiedzeniu w dn. 5.VI.1937 r.).

Parmi les définitions différentes des fonctions à variation bornée de deux variables ce sont les définitions de M. Hardy[1]) et de M. Tonelli[2]) auxquelles correspondent les classes de fonctions intervenant le plus souvent en analyse contemporaine.

La fonction $F(x, y)$ est dite à variation bornée au sens de Hardy dans un rectangle R. si:

1. elle est à variation bornée sur chaque segment parallèle à l'un des axes et situé dans R,

2. son accroissement sur le rectangle est une fonction de rectangle à variation bornée dans R.

Il en résulte qu'une fonction à variation bornée au sens de Hardy admet presque partout les deux dérivées $F'_x(x,y)$ et $F'_y(x,y)$.

La fonction $f(x, y)$ est dite à variation bornée au sens de Tonelli dans un rectangle R si elle satisfait simultainement aux conditions suivantes:

1. Sa variation absolue $V_x(y)$ sur les segments parallèles à l'axe des x est une fonction sommable de y.

2. Sa variation absolue $V_y(x)$ sur les segments parallèles à l'axe des y est une fonctions sommable de x.

Nous conviendrons de dire que $f(x, y)$ est à variation bornée $(T)_x$, si elle satisfait à la première de ces conditions, qu'elle est à variations bornée $(T)_y$, si elle satisfait à la seconde.

---

[1]) Quarterly Journal of Mathematics. Vol. 37. 1905. p. 58.

[2]) L. Tonelli. Sulla quadratura delle superficie. Rendicondi delle R. Acc. Nazion. dei Lincei. 1926. Nota I. p. 357.

Il est aisé de démontrer[1]) qu'une fonction à variation bornée au sens de Hardy est une différence de deux fonctions isomonotones[2]), non décroissantes, dont l'accroissement sur le rectangle est non négatif.

Nous allons démontrer le théorème suivant:

Les dérivées partielles, supérieure $\overline{F}_x$ et inférieure $\underline{F}_x$ d'une fonction $F(x, y)$ à variation bornée au sens de Hardy dans un rectangle R sont à variation bornée $(T)_y$ dans ce rectangle.

Le théorème analogue pour les dérivées $\overline{F}_y$ et $\underline{F}_y$.

Démonstration. En égard à la décomposition d'une fonction à variation bornée au sens de Hardy, on peut supposer que $F(x, y)$ est isomonotone non décroissante à l'accroissement sur le rectangle non négatif dans le rectangle $R(a, b; c, d)$[1]).

Il suffit de faire la démonstration pour da dérivée $\overline{F}_x$, pour $\underline{F}_x$ le raisonnement est presque le même.

Comme $F(x, y)$ est non décroissante sur les côtés $y = c$ et $y = d$, la dérivée $\overline{F}_x$ y est finie presque partout. Soit x_0 tel que $\overline{F}_x$ est finie aux points (x, c) et (x, d). On a pour chaque $x_1 < d$:

$$F(x_0 + h, d) - F(x_0, d) - F(x_0 + h, y_1) + F(x_0, y_1) \begin{matrix} \leq 0 \text{ pour } h < 0 \\ \geq 0 \text{ pour } h > 0 \end{matrix}$$

d'où:

$$(1) \qquad \frac{F(x_0 + h, d) - F(x_0, d)}{h} \geq \frac{F(x_0 + h, y_1) - F(x_0, y_1)}{h}$$

Or il existe une suite de valeurs de h pour laquelle le second membre tend vers $\overline{F}(x_0, y_1)$.

Donc:

$$(2) \qquad \overline{F}_x(x_0, d) \geq \overline{F}_x(x_0, y_1).$$

En remplacant ci-dessus d par y_1 et y_1 par $y_2 < y_1$, on montre que:

$$(3) \qquad \overline{F}_x(x_0, y_2) \geq \overline{F}_x(x_0, y_2).$$

De même:

$$(4) \qquad \overline{F}_x(x_0, y_2) \geq \overline{F}_x(x_0, c).$$

---

[1]) Voir W. Küstermann. Functionen von beschr. Schwankung. Mathem. Annalen 77. 1916. p. 474.

[2]) La fonction $F(x, y)$ est isomonotone non décroissante, si les inégalités $x_2 \geq x_1$; $y_2 \geq y_1$ entrainent $F(x_2, y_2) \geq F(x_1, y_1)$.

[1]) C'ést à dire un rectangle dont les sommets opposés sont respectivement (a, c) et (b, d).

Les inégalités (2), (3) et (4) prouvent que $\bar{F}_x (x_0, y)$ est une fonction non décroissante, dont la variation absolue:

$$V_y (x_0) = \bar{F}_x (x_0, d) - \bar{F}_x (x_0, c).$$

Or la fonction:

$$V_y (x) = \bar{F}_x (x, d) - \bar{F}_x (x, c).$$

définie sur la pleine épaisseur de l'intervalle (a, b) est sommable, les fonctions $F(x, d)$ et $F(x, c)$ etant à variation bornée. Donc $\bar{F}_x (x, y)$ est à variation bornée $(T)_y$.

Notre théorème est ainsi démontré.

Il en résulte que la dérivée F'_x coïncide presque partout dans R avec une fonction à variation bornée $(T)_y$, tandis que F_y coïncide presque partout avec une fonction à variation bornée $(T)_x$.

Streszczenie:

Pochodne cząstkowe funkcji $F(x, y)$ o wahaniu skończonem w znaczeniu Hardy'ego posiadają własność następującą:

Pochodna cząstkowa górna $\bar{F}_x (x, y)$ i dolna $\underline{F}_x (x, y)$ są o wahaniu skończonem na prawie każdej prostej równoległej do osi y, przyczem wahania te, jako funkcje zmiennej x, są sumowalne.

Analogiczną własność mają pochodne $\bar{F}_y (x, y)$ i $\underline{F}_y (x, y)$.

ANTONI ZYGMUND.

Uwaga o szeregach sprzężonych.
A remark on conjugate series.

(Komunikat zgłoszony na posiedzeniu w dniu 5.VI.1937 r.)

Let $f(x)$ be a function defined almost everywhere in an interval (a, b), and continued outside (a, b) by the condition of periodicity: $f(x+w)=f(x)$, where $w=b-a$. Let $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ be any subdivision of the interval (a, b), and let ξ_i denote an arbitrary point of the interval (x_{i-1}, x_i). Consider the sum

$$I(t)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i+t)\,(x_i-x_{i-1}),$$

and suppose that $I(t)$ tends in measure to a constant I, when $\operatorname{Max}(x_i-x_{i-1})$ tends to 0, whatever the choice of the numbers x_i and ξ_i. Then, following Denjoy [1], we say that the function f is integrable B over (a, b) and we write

$$I=(B)\int_a^b f(x)\,dx.$$

The above definition may be extended in the Stieltjes direction. Suppose that two measurable functions $f(x)$ and $\Phi(x)$ are defined almost everywhere in (a, b) and are continued outside (a, b) by the conditions

$$f(x+w)=f(x), \quad \Phi(x+w)-\Phi(x)=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Consider the sums

$$H(t)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i+t)\,[\Phi(x_i+t)-\Phi(x_{i-1}+t)],$$

where the x_i and the ξ_i have the same meaning as above. If, for $\operatorname{Max}(x_i-x_{i-1})\to 0$, the expression $H(t)$ tends in measure to a constant H, we shall say that the function f is integrable BS over (a, b) with respect to the function Φ, and we write

$$H=(BS)\int_a^b f(x)\,d\,\Phi(x).$$

It is not difficult to see that, if Φ is of bounded variation over (a, b), and if f is integrable over (a, b), with respect to Φ, in the *LS* (that is Lebesgue-Stieltjes) sense, then f is also integrable *BS* with respect to Φ, both integrals having the same value. It is sufficient to restrict ourselves to the case of Φ non-decreasing. It is also sufficient to establish the decomposition

$$(1) \qquad f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

where f_1 is continuous and the value of $\int_a^b |f_2| \, d\Phi$ is less than an arbitrarily small $\varepsilon > 0$; for then the proof is analogous to the proof of the corresponding result for the *B* integral [cf. e. g. Zygmund, 4, p. 152]. The decomposition (1) follows e. g. from the fact that for every $\varepsilon > 0$ we can find an upper semicontinuous function $u(x)$ such that $u(x) \leq f(x)$, $\int_a^b (f-u) \, d\Phi < \varepsilon$ [cf. Saks, 3, p. 75]; since $u(x)$ is the limit of a non-decreasing sequence of continuous functions $c_n(x)$, we may take for f_1 any c_n with suffix sufficiently large.

It is well-known that the function conjugate to a summable function is integrable *B* and that the conjugate series is the Fourier series of its sum [cf. Kolmogoroff, 2, or Zygmund, 4, p. 153]. It is natural to expect that the corresponding result holds for Fourier-Stieltjes series, and we shall show that this is really the case, the proof being even simpler than for Fourier-Lebesgue series. We may restrict ourselves to the case of series without constant terms.

Theorem. *Let* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *be the Fourier-Stieltjes series corresponding to a function* $\Phi(x)$, *that is*

$$a_n - ib_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} \, d\Phi(x), \quad \textit{where} \quad \Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n}.$$

Then the conjugate series $\sum (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$ *is a Fourier series in the BS sense. More precisely,*

$$(2) \qquad -b_n = \frac{1}{\pi} (BS) \int_0^{2\pi} \cos nx \, d\bar{\Phi}(x), \quad a_n = \frac{1}{\pi} (BS) \int_0^{2\pi} \sin nx \, d\bar{\Phi}(x)$$

where

$$\bar{\Phi}(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n}.$$

Let us fix an integer $k > 0$. In order to prove the equations (2), we may suppose that $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = b_1 = \ldots = b_k = 0$. Then,

$$\overline{\Phi \cos k x} = \overline{\Phi} \cos k x, \quad \overline{\Phi \sin k x} = \overline{\Phi} \sin k x$$

[cf. Zygmund, 4, p. 152]. We must prove that the expression

$$H(t) = \sum_{i=1}^{n} \cos k (t + \xi_i) [\overline{\Phi} (x_i + t) - \overline{\Phi} (x_{i-1} + t)]$$

tends in measure to 0. The expression $H(t)$ being conjugate to

$$\sum_{i=1}^{n} \cos k (t + \xi_i) [\Phi (x_i + t) - \Phi (x_{i-1} + t)],$$

the Parseval relation gives

$$\int_0^{2\pi} H^2 (t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \cos k (t + \xi_i) [\Phi(x_i + t) - \Phi (x_{i-1} + t)] \right\}^2 dt.$$

The integrand on the right-hand side tends uniformly to $a_k^2 = 0$. Hence the right-hand side of the last equation tends to 0. This shows that $H(t)$ tends in measure to 0, and so gives the first part of (2). The second part of (2) is established similarly.

REFERENCES.

1. Denjoy, A. Sur l'intégration riemannienne, C. R. 169 (1919), 219—221.
2. Kolmogoroff, A. Sur un procédé d'intégration de M. Denjoy, Fund. Math., 11 (1928), pp. 27—28.
3. Saks, S. Theory of the Integral, Monografje matematyczne VII. Warszawa 1937.
4. Zygmund, A. Trigonometrical Series, Monografje matematyczne V, Warszawa 1937.

Streszczenie.

Nota zawiera rozciągnięcie definicji całki Boksa w kierunku Stieltjesowskim, oraz dowód twierdzenia, że szereg sprzężony do szeregu Fouriera-Stieltjesa jest również szeregiem Fouriera-Stieltjesa, ale w sensie Boksa.

JÓZEF MARCINKIEWICZ.

Kilka twierdzeń z teorii szeregów i funkcyj.

Quelques théorèmes sur les séries et les fonctions.

(Komunikat zgłoszony przez czł. A. Zygmunda na posiedzeniu w dn. 5.VI.1937 r.).

§ 1. Il est connu qu'une fonction continue admettant partout une dérivée symétrique inférieure positive est croissante.

Ce théorème tombe en défaut pour la dérivée symétrique supérieure. Nous avons le

Théorème 1[1]) *Il existe une fonction continue non-croissante dans aucun intervalle et admettant partout une dérivée symétrique supérieure positive.*

Démonstration.

Soit f une fonction admettant les valeurs 0,1 et 0 respectivement aux points 0,4 et 5, linéaire dans les segments (0,4) et (4,5), et de période 5. Désignons par $h(x)$ la fonction de période 5, égale à 7/2, 1/2, 7/2 et 4 respectivement pour $0 \leq x < 1/2$, $1/2 \leq x < 7/2$, $7/2 \leq x < 4$ et $4 \leq x \leq 5$. On vérifie facilement les inégalités

$$h(x) \geq 1/2; \; f(x + h(x)) - f(x - h(x)) \geq h(x)/8.$$

Un raisonnement tout à fait analogue à celui par lequel on démontre que la fonction de Weierstrass

$$\Sigma\, a^n \cos b^n x \qquad (0 < a < 1, ab > 7)$$

n'admet pas de dérivée en aucun point, permet de conclure que la dérivée symétrique supérieure de la fonction

$$\Sigma\, a^n f(b^n x) \qquad (0 < a < 1)$$

est égale à $+\infty$ dès que a est suffisamment petit et le produit ab suffisamment grand.

---

[1]) Le problème a été posé par M. S. Saks.

§ 2. On sait [4][1]) qu' il existe une fonction f intégrable au sens large de Denjoy et satisfaisant pour chaque x d'un ensemble de mesure positive à la condition suivante

$$L(x) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \left| \int_{\varepsilon}^{1} \{ f(x+t) - f(x-t) \} \frac{dt}{t} \right| = \infty .$$

D'autre part si $L < \infty$ pour $x \in E$, $|E| > 0$, l'intégrale conjuguée existe presque partout dans E. Il est aussi connu [3] qu' il y a des fonctions continues f pour lesquelles

$$L^*(x) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \left| \int_{\varepsilon}^{1} \{ f(x+t) - f(x) \} \frac{dt}{t} \right| = \infty, -\infty < x < \infty.$$

Par analogie on peut demander si l'inégalité $L^* < \infty$ vérifiée pour $x \in E$, $|E| > 0$, entraîne l'existence presque partout dans E de l'intégrale de Dini.

Or, il n'en est point. Nous allons démontrer le

Théorème 2. *Il existe une fonction f continue telle que $L^* < \infty$ presque partout et la limite*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \{ f(x+t) - f(x) \} \frac{dt}{t}$$

existe au plus dans un ensemble de mesure nulle.

Démonstration.

Soit $$0 < \varepsilon_\nu < 1/4$$

et $$\sum \varepsilon_\nu < \infty.$$

Désignons par f_ν la fonction égale à *un* pour $x = \pm 1/2$, à zéro pour $x = \pm 1/2 \pm \varepsilon_\nu$ et linéaire dans les segments entre les points $-1/2$, $-1/2 + \varepsilon_\nu$, $1/2 - \varepsilon_\nu$, $1/2$.

Posons $f_\nu(x) = f_\nu(x+1)$ et soit

$$\psi_{\nu,n}(x) = f_\nu(nx) / \varepsilon_\nu \lg n; \quad \Delta_{\nu,n}(x,h) = \psi_{\nu,n}(x+h) - \psi_{\nu,n}(x).$$

$$D_{\nu,n}(x) = \int_0^1 \Delta_{\nu,n}(x,t) \frac{dt}{t}; \quad D^*_{\nu,n}(x) = \int_0^{\varepsilon_\nu} \Delta_{\nu,n}(x,t) \frac{dt}{t}.$$

---

[1]) Les nombres en crochets désignent les numéros de la bibliographie.

Désignons enfin par $E_{\nu,n}$ l'ensemble de période $1/n$ dont la partie contenue dans l'intervalle $(-1/2n, 1/2n)$ est formée par le segment $[-(1-\varepsilon_\nu)/2n, (1-\varepsilon_\nu)/2n]$.

On prouve facilement que pour n assez grand et $x \in E_{\nu,n}$ on a

$$|D_{\nu,n}(x)-1| \leq \varepsilon_\nu ; \quad |D^*_{\nu,n}(x)-1| \leq \varepsilon_\nu$$

$$\max_x |\psi_{\nu,n}(x)| \leq \varepsilon_\nu .$$

Désignons la fonction correspondante $\psi_{\nu,n}$ par ψ_ν.

Dès que la suite $\{\varepsilon_\nu\}$ décroit assez rapidement, la série

$$\Sigma (-1)^\nu \psi_\nu (x)$$

représente la fonction demandée.

§ 3. Disons qu'un ensemble A est du type N s'il existe une série trigonométrique absolument convergente dans A et non-absolument convergente dans l' intervalle $(0,2\pi)$. Tout ensemble qui n'est pas du type N est appelé base de convergence absolue.

Théorème 3. *La somme de deux ensembles fermés du type N peut être une base de convergence absolue.*

Démonstration.

L'ensemble des valeurs de la série

$$S(t) = \pi \sum_1^\infty 2^{-\nu} \varphi_\nu (t) \text{ où } \varphi_\nu (t) = \text{sign} \sin 2^\nu \pi t ,$$

est identique avec le segment $(-\pi, \pi)$. Considérons une suite $\{n_\nu\}$ de nombres entiers croissants et posons

$$S_1 = \sum_{\nu=0}^\infty \Delta_{2\nu+1} \qquad \Delta_\nu = \sum_{i=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} 2^{-i} \varphi_i .$$

$$S_2 = \sum_{\nu=1}^\infty \Delta_{2\nu}$$

Soient A et B les ensembles des valeurs des séries S_1 et S_2. On démontre facilement que A et B sont parfaits. En tenant compte de la formule $S = S_1 + S_2$ on voit que l'ensemble des points z de la forme $x+y$, où $x \varepsilon A$ et $y \varepsilon B$ contient l'intervalle $(-\pi, +\pi)$. Il en résulte [6, spéc. p. 132] que l'ensemble $A+B$ n'est pas du type N. Posons $n_1 = 1$. Supposons $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{\nu-1}$ définis. Or, comme il y a au plus $3^{n_{\nu-1}}$ nombres $\theta_i (\nu-1)$ de la forme

$$\sum_{i=1}^{n_{\nu-1}} 2^{-i} \varphi_i ,$$

on peut choisir un nombre entier $m_\nu > n_{\nu-1}$ de sorte que l'on ait

(1) $$|\theta_i (\nu-1) m_\nu| \leq \nu^{-2} \pmod 1, \quad i=1, 2, \dots 3^{n_{\nu-1}}.$$

Choisissons maintenant $n_\nu > m_\nu$ de façon que l'on ait

(2) $$m_\nu 2^{-n_\nu} \leq \tfrac{1}{2} \nu^{-2}.$$

D'après (1) et (2), chaque nombre θ,

$$\theta = \pi \sum_{1}^{n_{\nu-1}} 2^{-i} \varphi_i + \pi \sum_{n_\nu}^{\infty} 2^{-i} \varphi_i,$$

vérifie l'inégalité

$$|\theta m_\nu| \leq 2\nu^{-2} \pmod{\pi}$$

Il en résulte que les séries

$$\sum |\sin m_{2\nu} x|, \quad \sum |\sin m_{2\nu+1} x|$$

convergent respectivement dans les ensembles A et B, donc ces derniers sont du type N.

§ 4. Désignons par $x_i^n (\alpha, \beta)$ les zéros du polynome de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ défini par l'équation différentielle
$(1-x^2)y'' - [(\alpha-\beta) + (\alpha+\beta+2)x]y + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0$; $\alpha, \beta > -1$, et par $L_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)$ le polynome interpolant de Lagrange admettant aux points $x_i^{(n)} (\alpha, \beta)$ des valeurs égales à celles de f. Nous allons démontrer le

Théorème 4. *Pour chaque couple $\alpha, \beta > -1$ il existe une fonction f continue, telle que la suite $L_n^{\alpha, \beta}(f, x) = L_n(x)$ diverge pour chaque $x, -1 < x < 1$.*

Pour $\alpha = \beta = 0$ ce résultat est connu ([2], [5]).

Démonstration.

Fixons un $\varepsilon > 0$. Pour $-1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$ on a (1)

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = Cn^{-\frac{1}{2}} p(\theta) \cos[(n+\gamma)\theta + \delta] + r_n(x)/n$$

$$P_n'^{(\alpha, \beta)} = Cn^{-\frac{1}{2}} q(\theta) \sin[(n+\gamma)\theta + \delta] + s_n(x),$$

où $x = \cos\theta$, les fonctions r_n et s_n sont uniformément bornées, p et q vérifient les conditions

$$0 < \Delta < p < \Delta'; \qquad 0 < \Delta < q < \Delta',$$

(Δ et Δ' dépendent de ε) et γ et δ sont des constantes.

Il en résulte que les zéros uniques du polynome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ situés dans l' intervalle $I_\varepsilon = (-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ sont donnés par les formules

(1) $X_i = \cos\theta_i$; $\theta_i = (2i+1)\pi/2(n+\gamma) - \delta/(n+\gamma) + O(n^{-\frac{3}{2}})$

et les valeurs correspondantes de $P'_n(x)$ par

(2) $$P'_n(x_i) = \pm C n^{\frac{1}{2}} q(\theta_i) + O(1).$$

Dans ces formules l'indice i varie de façon que les points $x_i = \cos\theta_i$ soient dans l'intervalle I_ε ; cet indice ne désigne point que x_i est le i-ième zéro du polynome $P_n(x)$. Enfin on prend dans la formule (2) successivement les signes $+$ et $-$.

Or, si la fonction f s'annule dans les segments $(-1, -1+\varepsilon)$ et $(1-\varepsilon, 1)$, on a d'aprés la formule $L_n^{\alpha,\beta}(f, x) =$

$$= \Sigma f(x_i) \left\{ P_n(x) P_{n+1}(x_i) - P_n(x_i) P_{n+1}(x) \right\} / P'_n(x) P_{n+1}(x_i)(x - x_i)$$

la formule suivante

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(f, x) - f(x) = \int_0^\pi \left\{ g(t) - g(\theta) \right\} \frac{p(t)\cos[(n+\gamma)\theta + \delta]}{\cos\theta - \cos t} \, d\psi_n(t) + O(1)$$

où $$x = \cos\theta, \quad g = f(\cos\theta)$$

et $\psi_n(t)$ est une fonction d' escalier dont les sauts sont dans les point $\theta_i^{(n)}$ et y sont égaux à $\pm 1/nq(\theta_i)$, les signes se changeant alternativement.

En tenant compte du fait bien connu que l' égalité $x_i^{(n)} = x_i^{(n+1)}$ est impossible et en appliquant la méthode utilisée dans ma note *„Sur la divergence de polynomes d'interpolation“*, [5], on démontre d'après la dernière formule le

Lemme *Pour chaque* $\varepsilon > 0$ *et chaque* $M > 0$ *il existe une fonction continue* f, *s'annulant pour* $-1 \leq x \leq -1+\varepsilon$ *et* $1-\varepsilon \leq x \leq 1$ *ei satisfaisant aux conditions suivantes*

a) La suite $L_n^{(\alpha,\beta)}(f, x)$ *converge uniformément dans chaque intervalle* $(-\Delta, \Delta)$, $0 < \Delta < 1$.

b) $$|f(x)| \leq \varepsilon,$$

c) pour chaque $x \in (-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ *il existe un* $n(x)$, $n(x) \leq n_\varepsilon$, *tel que*

$$\left| L_{n(x)}^{(\alpha,\beta)}(f, x) \right| \geq M.$$

La modification de la démonstration est si insignifiante, que nous ne croyons pas utile de reproduire les calculs.

Le théorème demandé est une conséquence facile du lemme.

BIBLIOGRAPHIE.

1. G. Darboux. Mémoire sur l'approximation des fonctions des trés grands nombres. Journ. Math. 4 (1878) p. 5-57.
2. G. Grünwald. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome stetiger Funktionen. Ann. of Math, 37 (1936), p. 908—918.
3. S. Kaczmarz. Integrale vom Dinischen Typus. Stud. Math. 3 (1931) p. 189 — 199.
4. J. Marcinkiewicz. Sur les séries de Fourier. Fund Math. 27 (1936) p. 38 — 69.
5. J. Marcinkiewicz. Sur la divergence de polynomes d' interpolation. Acta Szeged, 8 (1937), p. 131—135.
6. A. Zygmund. Trigonometrical Series. Monografje Matem. V, Warszawa—Lwów, 1935.

Streszczenie.

Praca niniejsza zawiera kilka różnych wyników. W § 1 udowadniam, że istnieje funkcja ciągła, posiadająca wszędzie pochodną symetryczną górną dodatnią i nierosnąca w żadnym przedziale. W § 2 wykazuję istnienie funkcji ciągłej f, takiej, że prawie wszędzie

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \left| \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\, dt \right| < \infty$$

a granica

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \{f(x+t)-f(x)\} \frac{dt}{t}$$

istnieje co najwyżej w zbiorze miary zero. W § 3 pokazuję, że suma dwóch zbiorów zamkniętych typu N może nie być typu N. W paragrafie ostatnim konstruuję funkcję ciągłą, której ciąg wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a w punktach zerowych wielomianów Jacobiego jest rozbieżny dla $-1 < x < 1$.

DUWID WAJNSZTEJN.

Pewien wzór na bikwaterniony.
Eine Formel für die Biquaternionen.

(Komunikat zgłoszony przez czł. J. Rudnickiego na posiedzeniu w dniu 5.VI.1937 r.).

1. Clifford hat die Biquaternionen durch die formel

(1) $$q_1 + \omega q_2$$

definiert, wo q_1 und q_2 Quaternionen und ω eine neue hyperkomplexe Zahl bezeichnen. ω definieren die Bedingungen

(2) $$\omega^2 = 0$$

(3) $$\omega q = q \omega$$

für eine beliebige Quaternion q [1]).

J. Brill hat viergradige Matrizen angegeben, die ω und q repräsentieren. Die Matrix für ω ist eine komplexe Matrix [1]).

In dieser Notitz werden wir achtgradige Matrizen angeben, die die Biquaternionen repräsentieren werden.

2. Man sieht leicht ein, dass die Matrizen

(4) $$M = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ b & a \end{Vmatrix}$$

einen Zahlenkörper bilden, wo a und b Elemente eines Zahlenkörpers sind. Es gelten die Identitäten

(5) $$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{Vmatrix}$$

(6) $$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Aus

(7) $$ab = ba$$

folgt

(8) $$\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{Vmatrix}$$

---

[1]) J. Brill: On the expression of the so-called biquaternions and triquaternions with the aid of quaternary matrices. Proc. Lond. Math. Soc. ser. II. vol. 4. 1906) str. 124—130.

3. Sind als Elemente der Matrix (4) die Quaternionen q_1 und q_2 angenommen so erhalten wir die Biquaternionen

(9)
$$B = \begin{Vmatrix} q_1 & 0 \\ q_2 & q_1 \end{Vmatrix}$$

Für ω erhalten wir die Matrix

(10)
$$\omega = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Es gilt nämlich die Formel (aus (5)):

(11)
$$B = \begin{Vmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} q_2 & 0 \\ 0 & q_2 \end{Vmatrix}$$

Aus (6), (7) und (8) folgt, dass ω durch (10) definiert, der Bedingungen (2) und (3) genügt.

Aus den aligemeinen Eigenschaften der Matrizen folgt. dass man in (9) q_1 und q_2 mit Matrizen, die Quaternionen darstellen, vertretten darf und dann erhalten wir eine Matrix für die Biquaternion.

Setz man statt q die von Brill[2]) angegebene Matrix

(12)
$$q = \begin{Vmatrix} t, & -x, & -y, & -z \\ x, & t, & -z, & y \\ y, & z, & t, & -x \\ z, & -y, & x, & t \end{Vmatrix}$$

dann erhalten wir für die Biquaternionen die Matrix

(13)
$$B = \begin{Vmatrix} t_1, & -x_1, & -y_1, & -z_1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ x_1, & t_1, & -z_1, & y_1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ y_1, & z_1, & t_1, & -x_1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ z_1, & -y_1, & x_1, & t_1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ t_2, & -x_2, & -y_2, & -z_2, & t_1, & -x_1, & -y_1, & -z_1 \\ x_2, & t_2, & -z_2, & y_2, & x_1, & t_1, & -z_1, & y_1 \\ y_2, & z_2, & t_2, & -x_2, & y_1, & z_1, & t_1, & -x_1 \\ z_2, & -y_2, & x_2, & t_2, & z_1, & -y_1, & x_1, & t_1 \end{Vmatrix}$$

Setzen wir dagegen statt q die Matrix[3])

(14)
$$q = \begin{Vmatrix} t + ix, & y + iz \\ -y + iz, & t - ix \end{Vmatrix}$$

---

[2]) J. Brill: loc. cit.

[3]) E. Klein: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I. (1926) str. 190.

dann erhalten wir eine viergradige Matrix:

$$(15) \qquad B = \begin{Vmatrix} t_1 + ix_1 \,, y_1 + iz_1 \,, & 0 \quad , \quad 0 \\ -y_1 + iz_1 \,, t_1 - ix_1 \,, & 0 \quad , \quad 0 \\ t_2 + ix_2 \,, y_2 + iz_2 \,, & t_1 + ix_1 \,, y_1 + iz_1 \\ -y_2 + iz_2 \,, t_2 - ix_2 \,, & -y_1 + iz_1 \,, t_1 - ix_1 \end{Vmatrix}$$

Streszczenie.

W notatce niniejszej otrzymujemy pewną macierz ósmego rzędu, która może być traktowana jako reprezentant danego bikwaternionu.
